Να βρεθούν τα ακρότατα των παρακάτω συνάρτησης

$$f(x) = |1-x^2| + |x| \quad , \quad -1 \leq x \leq 2.$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε, στην ουσία τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -(1-x^2) - x, & x \leq -1 \\ (1-x^2) - x, & -1 < x \leq 0 \\ (1-x^2) + x, & 0 < x \leq 1 \\ -(1-x^2) + x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Δηλαδή,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 1, & x \leq -1 \\ -x^2 - x + 1, & -1 < x \leq 0 \\ -x^2 + x + 1, & 0 < x \leq 1 \\ x^2 + x - 1, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x < -1 \\ -2x - 1, & -1 < x < 0 \\ -2x + 1, & 0 < x < 1 \\ 2x + 1, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Εξετάζουμε ως προς τη διαφορισιμότητα στα σημεία όπου η συνάρτηση f αλλάζει κλάδο. Ας εξετάσουμε, πρώτα ως προς τη συνέχεια σε αυτά τα σημεία.

- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 - x - 1) = 1$
- $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (-x^2 - x + 1) = 1$

$f(-1) = 1$ συνεχής στο -1.

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x^2 - x + 1) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x^2 + x + 1) = 1$

$f(0) = 1$ συνεχής στο 0.

- $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (-x^2 + x + 1) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + x - 1) = 1$

$f(1) = 1$ συνεχής στο 1.

• $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x^2-x-1-((-1)^2-(-1)-1)}{x+1} =$

$= \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x^2-x-1-(1+1-\cancel{1})}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x^2-x-2}{x+1} =$

$= \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{\cancel{(x+1)}(x-2)}{\cancel{x+1}} = -3.$

• $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{-x^2-x+1-(-(-1)^2-(-1)+1)}{x+1} =$

$= \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{-x^2-x+\cancel{1}+\cancel{1}-\cancel{1}-\cancel{1}}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} - \frac{x\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = 1$

$\{\nexists f'(-1)\}$

• $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x^2-x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} - \frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}} = -1$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-x^2+x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}(1-x)}{\cancel{x}} = 1$

$\{\nexists f'(0)\}$

• $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-x^2+x+1-(-\cancel{1}+\cancel{1}+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-x^2+x}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 1$

• $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2+x+1-(1+1+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-2}{x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 3.$

$\{\nexists f'(1)\}$

Έπειτα, υπολογίζουμε τα κρίσιμα σημεία.

i) Είναι τα σημεία όπου : $f'(x_0)=0$

ii) —״— —״— —״— —״— : $\nexists f'(x_0)$

Άρα, τα κρίσιμα σημεία είναι τα $-1, 0, 1$.

Έτσι, κατασκευάζοντας τον κατάλληλο πίνακα προσήμου έχουμε, ότι:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$	‖	$\nearrow$		$\searrow$	‖	$\nearrow$		$\searrow$	‖	$\nearrow$		$\searrow$	
					T.M				T.M				T.M.		

Η f παρουσιάζει 2 τοπικά μέγιστα
στα σημεία $x_0=-\frac{1}{2}$ και $x_0=\frac{1}{2}$.
τα $f(-\frac{1}{2})=-(-\frac{1}{2})^2-(-\frac{1}{2})+1 = -\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$
και

$$f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1=\frac{5}{4}.$$

Επί, $f(0)=1$, $f(-1)=1$, $f(1)=1$ είναι τοπικά ελάχιστα της f στα οποία δεν υπάρχει η παράγωγος.
άρα $m=\min\{f(0), f(-1), f(1)\}=1$.
Επί, από τοπικά μέγιστα έχουμε τα:

$f(\pm\frac{1}{2})=\frac{5}{4}$ όπου υπάρχει η παράγωγος εκεί
και το $f(2)=5$ όπου εκεί υπάρχει η παράγωγος
άρα, $M=\max\{f(\frac{1}{2}), f(-\frac{1}{2}), f(2)\}=5$